4èmes journées ORASIS, Mulhouse, 11-14 octobre 1993. Thème 3 : surfaces et données 3D.

CARACTÉRISATION D'UNE SURFACE FERMÉE CONVEXE PAR INTERPOLATION DE SHANNON CIRCULAIRE

C. Léger, J. Thiel, C. Bonciu, R. Lédée, J. Fantini, G. Lamarque

LESI et GdR 134 du CNRS, ESPEO, Université d'Orléans, BP6744, 45067 Orléans cedex 2

Résumé. L'interpolation de Shannon circulaire est ici utilisée pour localiser les échantillons, en nombre minimum, qui caractérisent une surface fermée convexe avec une précision donnée sous la forme d'un maximum d'erreur moyenne d'interpolation. A titre d'exemple, la méthode est utilisée pour la reconstruction 3D du ventricule gauche.

1. INTRODUCTION

Le développement polaire d'un contour fermé plan convexe autour d'une origine interne quelconque est une fonction continue périodique-2π. Un échantillonnage de cette fonction à la fréquence de Nyquist caractérise complètement le contour puisqu'il est exactement restitué par interpolation circulaire de Shannon [1] entre les échantillons. Une fréquence d'échantillonnage moindre conduit à une erreur d'interpolation et, inversement, il est possible de déterminer la fréquence qui restitue le contour avec une précision requise. Cette fréquence sera minimum si on choisit pour origine le centre du plus grand cercle moindres carrés (MC) du contour [2], ce qui entraine une compression d'information vers les basses fréquences.

Soit une surface fermée convexe représentée par un ensemble de contours méridiens relativement à un axe polaire. Le nombre de plans méridiens nécessaires pour la caractériser avec une précision requise est égal à la moitié du nombre minimum d'échantillons caractéristiques des contours dans les sections perpendiculaires à l'axe polaire. La précision peut être exprimée en pourcentage d'erreur moyenne d'interpolation relativement au rayon des plus grands cercles MC des contours considérés. On aboutit donc à une méthode particulièrement simple de caractérisation de la surface.

Cette méthode est appliquée au cas du ventricule gauche du coeur pour lequel les échantillons caractéristiques sont prélevés sur des images échocardiographiques apicales obtenues par une sonde échographique 2D tournante [3]. Les résultats obtenus permettent de déterminer les données nécessaires pour restituer les déformations du ventricule pendant un cycle cardiaque.

2. CARACTÉRISATION D' UN CONTOUR FERMÉ PLAN CONVEXE

Une fonction réelle positive continue $\rho(\theta)$ périodique-2π, dérivable seulement un nombre fini de fois, est complètement caractérisée par la suite finie $(C_0,C_1,...,C_N)$ de ses coefficients de Fourier complexes (hormis C_0 et C_N qui sont réels) jusqu'à la fréquence angulaire de Nyquist $N/(4\pi)$. Elle l'est également par les 2N échantillons réels $\{\rho_n\}$ angulairement équirépartis sur le support d'échantillonnage $\{\theta_n=\pi n/N\}$, $0\leq n\leq 2N-1$, qui se déduisent des coefficients de Fourier par transformée de Fourier discrète (TFD). Il est en effet équivalent de reconstituer $\rho(\theta)$ par sa série de Fourier usuelle ou par interpolation de Shannon entre tous les échantillons périodisés-2N. Si cette interpolation est réalisée entre les seuls échantillons impairs, par exemple, la nouvelle fonction interpolée oscillera autour de $\rho(\theta)$ avec un décalage nul aux échantillons impairs et de plus grande amplitude au voisinage des échantillons pairs. L'écart-type de ces amplitudes est une mesure de l'erreur moyenne d'interpolation commise. Si le support d'interpolation est à nouveau réduit, l'erreur moyenne pourra être mesurée sur les échantillons les plus proches des milieux des intervalles définis par le support. La fonction $\rho(\theta)$ est donc caractérisée sans approximation par 2N échantillons, et avec une erreur d'interpolation mesurable lorsque ce nombre d'échantillons est réduit.

Mais on peut associer à un contour fermé donné autant de fonctions périodiques $\rho(\theta)$ qu'il y a d'origines internes possibles, excluant bien entendu les multivaluations. Ce contour est alors caractérisé par les coordonnées de l'origine choisie et par les échantillons nécessaires à l'interpolation de Shannon avec la précision requise. A chaque origine est associée une fréquence de Nyquist, et donc un nombre initial d'échantillons, ainsi que des erreurs d'interpolation différentes

lorsque ce nombre initial est réduit. Il lui correspond également un premier coefficient de Fourier C_0 qui est le rayon du cercle MC autour duquel oscille le contour avec un écart quadratique moyen mesurable. En choisissant pour origine le centre du plus grand de ces cercles MC, qui correspond à l'écart minimum, les oscillations sont réduites car on réalise une compression d'information vers les basses fréquences [2]. Avec une telle origine centrale, la fréquence de Nyquist et l'erreur d'interpolation sont donc minimisées. Toutes choses égales par ailleurs, la caractérisation du contour est donc optimisée en choisissant son origine centrale.

L'efficacité de la caractérisation proposée est illustrée sur la figure 1 pour un exemple de contour convexe $\rho(\theta)$ défini par 1024 échantillons. Sur la partie gauche (a) sont tracés $\rho(\theta)$ ainsi que les contours interpolés $\rho_4(\theta)$ et $\rho_8(\theta)$, entre respectivement N=4 et N=8 échantillons équirépartis, à partir d'une origine quelconque 0. Les erreurs moyennes d'interpolation ε_N^O sont reportées, sur la courbe en trait pointillé de la figure 1.c, pour toutes les valeurs de N obtenues par dichotomies à partir de 1024. Elles sont exprimées en pourcentages du rayon vecteur moyen qui est le rayon du cercle MC du contour centré en 0. Les erreurs relatives obtenues avec l'origine centrale, ε_N^C, sont également représentées en trait plein sur ce graphique. On constate qu'elles sont pratiquement réduites de moitié, ce qui peut être visuellement observé - toujours pour N=4 et N=8 - sur les contours de la partie (b) de la figure 1. Pour fixer les idées, 32 échantillons induisent une erreur d'interpolation de 1,8 % avec l'origine 0 mais cette erreur est réduite à seulement 0,5 % avec l'origine centrale C.

(a) (b) (c)

Figure 1. *Contours synthétique [$\rho(\theta)$, trait fort] et interpolés entre 4 [$\rho_4(\theta)$, trait fin] et 8 échantillons [$\rho_8(\theta)$, trait pointillé] autour (a) d'une origine quelconque 0, et (b) d'une origine centrale C. Dans la partie (c), la courbe d'erreur moyenne d'interpolation en trait pointillé, ε_N^C, correspond à l'origine quelconque 0, et celle en trait plein, ε_N^C, à l'origine centrale C.*

3. CARACTÉRISATION D' UNE SURFACE FERMÉE CONVEXE

Pour pouvoir transposer à une surface fermée convexe la caractérisation d'un contour plan par interpolation de Shannon, il faut définir cette surface par un ensemble de contours plans à échantillons angulairement équirépartis. Un découpage en contours méridiens équirépartis en longitude s'impose donc. En effet, l'intersection de ces contours avec un quelconque plan parallèle engendre dans celui-ci un nouveau contour continu et fermé, avec sa propre fréquence de Nyquist. On en déduit le nombre de plans méridiens nécessaires pour caractériser ce contour parallèle sans approximation, soit la moitié du nombre requis d'échantillons. Evidemment, le nombre de plans méridiens finalement retenu doit correspondre au contour parallèle qui a la plus grande fréquence de Nyquist. Si on se fixe une erreur d'interpolation à ne pas dépasser, ce nombre sera égal à la moitié du plus grand nombre d'échantillons parmi ceux nécessaires aux interpolations de tous les contours parallèles avec une erreur moindre.

La technique de caractérisation de la surface par interpolation de Shannon peut donc être exposée comme suit. On se fixe tout d'abord une valeur plafond pour l'erreur moyenne d'interpolation. Puis on découpe la surface en 2 contours méridiens orthogonaux à 4 échantillons chacun, dont les 2 pôles communs, ce qui définit également un contour équatorial à 4 échantillons. On estime les erreurs d'interpolation de ces 3 contours interpolés à travers 2 échantillons sur 4 par l'écart-type des 2 écarts sur les 2 échantillons restants. Ces 3 erreurs étant certainement supérieures à la valeur plafond

de l'erreur, on recommence par dichotomie avec 4 plans méridiens à 8 échantillons, ce qui définit 3 plans parallèles à également 8 échantillons. On compare ensuite les plus grandes erreurs méridenne et équatoriale pour déterminer si la dichotomie suivante doit conduire à doubler le nombre de plans méridiens ou le nombre d'échantillons des contours méridiens, c'est-à-dire le nombre de plans équatoriaux. L'algorithme de caractérisation de la surface est stoppé lorsque la plus grande erreur d'interpolation sur l'ensemble des contours méridiens et équatoriaux est inférieure à la valeur plafond. Cette méthode dichotomique conduit donc à un nombre de plans méridiens, M, et à un nombre d'échantillons dans ces plans, N, qui sont des puissances entières de 2. La surface est finalement caractérisée par 2NM + 4 coordonnées qui sont celles des échantillons distincts (les pôles sont communs) et des origines centrales des contours méridiens.

En pratique, les origines centrales sont localisées itérativement avec un algorithme rapide décrit par ailleurs [2] et les valeurs interpolées du contour aux milieux des N intervalles d'un support d'échantillonnage sont calculées en deux étapes. Les N+1 coefficients de Fourier sont tout d'abord calculés par TFD de dimension 2N puis l'interpolation de Shannon est calculée par TFD inverse de dimension double 4N sur le tableau des coefficients complété par des zéros. Notons enfin que le nombre d'échantillons caractéristiques de la surface peut varier légèrement en fonction de l'axe polaire retenu, mais que la direction de l'axe polaire optimum est fournie, dans chaque plan méridien, par la phase du coefficient de Fourier C_2.

4. APPLICATION AU VENTRICULE GAUCHE

La méthode précédente a été utilisée en échocardiographie pour caractériser la surface du ventricule gauche du coeur. Chaque contour méridien a tout d'abord été relevé manuellement, puis défini par 512 échantillons, sur une coupe tomographique apicale semblable à celle de la figure 2.a. Après localisation de l'origine centrale sur chaque contour, l'application de l'algorithme de dichotomie décrit ci-dessus a permis de déterminer que tous les contours méridiens étaient caractérisés à mieux de 1 % d'erreur d'interpolation par seulement 32 échantillons. Pour déterminer le nombre nécessaire de telles coupes méridiennes, une étude préalable a été faite sur plusieurs coupes parasternales qui sont représentatives de la section du ventricule dans des plans parallèles au voisinage de l'équateur. Après relevé manuel des contours à 512 échantillons sur ces coupes, dont un exemple est présenté figure 2.b, il a été déterminé par la méthode ci-dessus que ces contours sont tous caractérisés à mieux de 1 % par 16 échantillons. La surface du VG est donc finalement caractérisée à 1 % par 8 plans méridiens, soit 250 échantillons et 8 origines centrales.

(a) (b)

Figure 2. *Exemples de coupes tomographiques du ventricule gauche obtenues en échocardiographie. (a) : coupe apicale ; (b) coupe parasternale.*

Pour notre exemple, ces 250 échantillons sont représentés sur la figure 3.a. en mode fil de fer. La figure 3.b. est une restitution du volume du VG par facettes positionnées à partir de ces seuls 250

échantillons. Pour passer d'une représentation à l'autre, les 32 échantillons caractéristiques de chaque contour méridien ont été complétés à 512 par interpolation de Shannon circulaire. Puis de nouvelles interpolations de Shannon ont été effectuées pour définir les 254 contours équatoriaux avec également 512 échantillons à la place des 8 caractéristiques. Le volume du VG est donc rendu finalement avec 130050 échantillons. A noter que cette représentation 3D - induite par la méthode de caractérisation - représente une alternative à la classique représentation par B-splines.

(a) (b)

Figure 3. *Surface 3D du ventricule gauche caractérisée par les 250 échantillons de la partie (a), puis représentée par facettes dans la partie (b) après interpolation de Shannon circulaire.*

5. CONCLUSION

La méthode proposée permet de caractériser un volume convexe par un nombre minimum d'échantillons relativement à une précision fixée. Basée sur l'interpolation circulaire de Shannon, elle est simple, rapide, d'interprétation aisée, et induit une technique de reconstruction de la surface à partir de l'échantillonnage minimum.

Elle a été utilisée à titre d'exemple pour représenter le volume du ventricule gauche du coeur à partir d'images échocardiographiques. Il suffit alors de 8 images tomographiques pour une reconstruction 3D complète avec seulement 258 points pour une précision meilleure que 1 % de son rayon moyen. Ce résultat permet de notablement simplifier la problématique du suivi des variations spatio-temporelles de cet organe.

Références

[1] C.E. Shannon & W. Weaver, *The mathematical theory of communication*, Illinois University, 1969.

[2] C. Léger, J. Thiel, R. Lédée, F. Patat, L. Pourcelot, *Left ventricle modeling by discrte polar Fourier transform using echocardiographic images*, Proc. 14th IEEE EMBS, Paris, 1992.

[3] S. Eiho et M. Kuwahara, *3-D reconstruction of the left ventricle*, IEEE / Eighth Annual Conference of the Engineering in Medicine and Biology Society, pages 112-115, 1986.